Dominique Sels

La *Géométrie* de Descartes

exposé pour le cours de
M. Roshdi Rashed, université de Paris VII

1. résumé pouvant servir d'introduction

Descartes se tient exilé et distant d'autrui ; mais en ses rapports avec sa terre natale, il est allé à l'essentiel : de son pays il a retenu la langue, puisque, la Hollande étant sa terre d'élection, il choisit d'écrire la *Géométrie* en français quand Viète et Fermat écrivent en latin, qui depuis des siècles était la langue des mathématiques.

Le français connaîtra ensuite une suprématie comme langue scientifique jusqu'au vingtième siècle. La *Géométrie* est par conséquent un texte capital parmi ceux qui aient jamais été écrits pour que rayonne cette langue.

La *Géométrie* de Descartes paraît à Leyde en 1637. Texte important de la littérature française, je dis littérature, pour n'être pas la seule à avoir remarqué que ce mathématicien se met en scène, comme dans un roman. Descartes a conçu et écrit une *Méthode* qui est composée d'une préface et de trois essais (*Dioptrique*, *Météores* et *Géométrie*). La préface de cette *Méthode* est intitulée *Discours* ; elle est devenue si célèbre que les non mathématiciens trouvent bien de la publier seule.

Dans la *Géométrie* Descartes invente la géométrie des coordonnées, indépendamment de Fermat (publié en 1679). Descartes applique l'algèbre à la géométrie. Il dégage qu'une courbe est entièrement décrite par une équation, l'équation qu'aujourd'hui nous appelons cartésienne. Cet essai connut un retentissement immédiat, son impact se mesure en siècles. Dès lors la géométrie et l'algèbre se correspondent dans toute l'étendue des mathématiques exactes, telle que Descartes définissait cette étendue. La structure algébrique permet le classement des courbes et la résolution méthodique des problèmes.

Pour ce qui regarde le style de cet auteur, il faut garder en mémoire que Descartes fut impressionné par la condamnation de Galilée, et qu'il avait pris pour devise « pour vivre heureux, vivons cachés » ; en lisant on a parfois l'impression d'un style voilé. Ainsi dans la dernière phrase de la *Géométrie*, qui semble une souriante fin de fable : « Et j'espère que nos neveux me sauront gré, non seulement des choses que j'ai ici expliquées ; mais aussi de celles que j'ai omises volontairement, afin de leur laisser le plaisir de les inventer. » C'est comme *Le Laboureur et ses enfants*, il y aurait un trésor caché. Les fables de La Fontaine arrivent trente ans plus tard, en 1668.

Au contraire, pour l'écriture non pas du français mais des mathématiques proprement dites, Descartes apporte beaucoup de clarté ; il fixe notre notation littérale : tous les mathématiciens écrivent aujourd'hui « en descartes », puisque c'est lui qui dans la *Géométrie* invente le style « y = ax +b ».

Ce bonheur d'expression survenant en 1637, on ne peut s'empêcher de le rapprocher de la grandeur du français classique, qui lui est à peu près concomitante. On s'accorde en effet à situer l'apogée de la langue française entre 1660 et 1680.

Là où son prédécesseur Viète écrit :

« B in A Quadratum, plus D plano in A, aequari Z solido »

Descartes écrit (en notant x et non A), avec un grand gain de concision, pour la joie de tous les cerveaux à venir soulagés de galimatias :

$$b x^2 + dx = z$$

qui est notre notation moderne, au signe d'égalité près, puisque René Descartes utilise non pas celui-là mais un autre signe, bouclé, qui n'est pas sur mon clavier.

Pendant longtemps (et à la date de rédaction de cet article) celui qui cherchait en librairie française la *Géométrie* ne la trouvait pas. Pour compenser la profondeur et l'obscurité du puits où la société de ce pays jetait les mathématiques et leur histoire, le libraire obligeant proposait un monticule de douze éditions de la préface — dans laquelle le mot raison gagnerait à être rattaché à la notion de raison géométrique.

Voilà pour la patrie reconnaissante. Les Américains publient à prix modique la *Géométrie* en édition courante (Dover), format à peine plus grand que le poche, livre à couverture souple et plastifiée, de très bonne qualité, avec cahiers cousus et non collés : c'est une édition annotée, bilingue : sur une page sur deux se trouve le fac-similé de l'édition originale de 1637.

2. les mathématiques au XVII^e^ siècle et plus tôt

Les mathématiques au XVII^e^ siècle connurent un essor très considérable grâce aux travaux de quelques esprits : Viète pour l'algèbre symbolique, Descartes pour la géométrie algébrique plus tard appelée géométrie analytique, Fermat pour la renaissance de la théorie des nombres, Fermat de nouveau pour la renaissance et Pascal pour les fondements du calcul des probabilités, Newton et Leibniz quant au calcul infinitésimal. Dès lors, les mathématiques s'appliquent à la physique, les mathématiques servent de modèle à la pensée scientifique qui se structure ; l'interprétation de la science change.

La période qui prépara et permit ces bouleversements est marquée par :

- la diffusion des textes des Anciens et des idées nouvelles grâce à l'imprimerie ;
- les tâtonnements et progrès de l'algèbre qui se développe dans la tradition arabe.

En 1486 est imprimé à Padoue le *Tractatus Latitudinibus Formarum*, où Nicolas Oresme (v.1320-1382) étudie la variation des longitudes et latitudes de points disposés en séries. Ces séries de points, ou formes, sont distribuées selon une droite, ou en cercle, ou en parabole.

Des systèmes de coordonnées étaient utilisés depuis longtemps, par les Anciens pour localiser des points, en astronomie ou bien par les riverains du Nil en leurs activités agraires. Ptolémée, Hipparque utilisent longitudes et latitudes. Les raisonnements grecs sur les figures emploient souvent deux axes.

En 1494 paraît, en italien et non en latin, un des premiers manuels imprimés de mathématiques, la *Summa*, de Luca Pacioli, professeur et moine franciscain (1445-1514). Cette compilation du savoir mathématique européen de l'époque (dont le titre complet est *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*) emprunte à Platon, Aristote, Euclide, Archimède, Nicomaque, Théon de Smyrne et Boèce Thabit, Léonard de Pise, Bradwardine, Albert de Saxe, Jordanus, Nemorarius, Jean de Sacrobosco et Prodoscino de Beldomandi. Pacioli consacre aussi une partie importante à l'arithmétique appliquée, à l'attention des banquiers et marchands. La qualité de l'ouvrage fut discutée dès Cardan, en 1539.

Pacioli ainsi que deux autres algébristes qui l'ont précédé, l'astronome Regiomontanus et le médecin Nicolas Chuquet résolvent par des moyens algébriques des problèmes numériques qui sont souvent de nature géométrique.

En mathématiques et dans les arts et lettres, la culture antique sous-tend la Renaissance. Cependant l'algèbre et l'arithmétique arabes répondent tout autant sinon mieux aux préoccupations des savants occidentaux, que la forme des traités grecs de géométrie. En 1464, Regiomontanus a redécouvert les *Arithmétiques* de Diophante. Plus tard, l'école allemande développera l'algèbre et élaborera, en 1525 avec Rudolff, puis avec Stifel, les notations cossiques qui, à l'origine, sont des abréviations de termes traduits de l'arabe.

Au milieu du XVe siècle, l'école italienne, qui semble au fait de l'ensemble des acquis algébriques arabes, résout, avec Tartaglia, Cardan, Ferrari et Bombelli, les équations des troisième et quatrième degré.

Depuis Vinci, les esprits s'éprennent de mécanismes (Cardan, puis Descartes).

3. notation moderne : Viète fonde le calcul littéral

La notation progresse grâce à Bombelli et à l'ingénieur flamand Stevin mais c'est Viète (1510 – 1603), homme politique français – conseiller privé du roi – et maître des requêtes, pionnier des mathématiques modernes, qui fonde le calcul littéral (*In artem analyticam Isagoge*, Tours, 1591). Viète associe clairement l'algèbre numérique et la géométrie. Son calcul noté au moyen de lettres sert à la fois au calcul sur les nombres et au calcul spécieux (sur les espèces : segments, aires, volumes).

Viète structure sa méthode après avoir invoqué Platon : « Il existe une voie de rechercher la vérité dans les mathématiques dont on dit que Platon fut le premier inventeur, appelée par Théon “analyse» » (De la définition et division de l’analyse, in *In artem analyticam Isagoge* ; voir par exemple *Ménon*, 86 e). Reprenant les deux parties de l’analyse définies par Théon, il y adjoint une troisième, « rétique exégétique ». De la sorte :

1) l’analyse zététique met en équation un problème (numérique ou géométrique) ;
2) la poristique transforme et discute les équations ;
3) l’exégétique revient au domaine de départ, apportant la résolution, géométrique ou numérique, du problème.

Il est difficile de démêler les influences directes et indirectes que subira Descartes, mais Viète paraît son plus marquant prédécesseur.

C’est la notation cartésienne que nous utilisons aujourd’hui, Descartes ayant considérablement amélioré les notations antérieures, celles de Viète et des successeurs de celui-ci : Anderson, Beaugrand, Roberval, Fermat ; Harriot, Oughtred ; Ghetaldi.

Viète utilise les voyelles en majuscules pour désigner les inconnues, les consonnes en majuscules pour les données. Il écrit :

« B in A Quadratum, plus D plano in A, aequari Z solido »

Descartes réserve les dernières lettres de l’alphabet (en minuscules) pour désigner les inconnues, et les lettres en majuscule pour les points. Il écrirait cette égalité (en notant x et non A) :

$b\ x^2 + dx = z$ (hormis que pour exprimer l’égalité, Descartes utilise un signe qui ressemble à un huit couché dont une boucle serait tronquée)

Pour la puissance carrée, il écrit « x^2 » dans le livre I de la Géométrie, et souvent « xx » ailleurs. Les autres puissances positives sont toujours notées à l’aide de l’exposant.

Cette égalité chez l’un et l’autre auteur n’a pas le même sens ; chez Descartes l’agrégat de mots et de lettres a disparu en même temps qu’est rompu le carcan théorique de la loi de l’homogénéité : telle est l’ouverture du livre I de la *Géométrie*.

Pour Viète, A et B représentaient des segments de droites, alors D devait représenter une aire (*plano*) et donc z, un volume (*solido*). Au contraire chez Descartes les segments sont identifiés aux nombres ; le produit de deux « lignes » (segments de droite) demeure une « ligne », et z est tout autant une ligne.

D'autre part, Descartes analysera des problèmes géométriques, d'une façon semblable à celle préconisée par Viète, et qui nous est si familière aujourd'hui qu'il ne nous est pas simple d'en mesurer la nouveauté. Descartes s'affranchit aussi des hellénismes, en écartant le raisonnement synthétique, propre à la géométrie des Anciens.

On peut s'aventurer à croire Descartes lorsqu'il affirme n'avoir guère plus du « feuilleté » Viète (lettre au père Mersenne, décembre 1637). Les indications autobiographiques de Descartes doivent être examinées avec prudence. Doté de l'orgueil des solitaires, il est souvent méprisant envers ses contemporains. C'est un esprit qui se tient exilé de son pays et distant d'autrui ; mais dans ses rapports avec sa terre natale ou avec les hommes, il est allé à l'essentiel : de son pays, il a retenu la langue, puisque, la Hollande étant pour vingt années sa terre d'élection, il choisit d'écrire en français quand Viète et Fermat écrivent en latin ; quant à ce que les autres peuvent lui apporter, il lit vite, en rapace.

4. bref rappel touchant la vie de Descartes

Descartes naquit sous le règne de Henri IV, en 1596, à La Haye, ville de Touraine. Il mourut à Stockholm en 1650 – Louis XIV alors était roi mais encore enfant ; sa mère Anne d'Autriche avec Mazarine assurait la Régence.

La famille de Descartes était de petite noblesse. Il étudia au collège de La Flèche tenu par les Jésuites. La géométrie et l'algèbre lui furent enseignées d'après Clavius.

Christoph Klau, ou Christophorius Clavius, était un Jésuite et mathématicien allemand (1537-1612) qui avait organisé à Rome l'enseignement scientifique. Les cours de mathématiques étaient puisés dans ses manuels ou en subissaient l'influence : une édition d'Euclide (1574, les six premiers livres des *Éléments*), une *Geometria Pratica* (1604), une *Algebra* (1608). Les travaux des Jésuites prouvaient leur très bonne connaissance des Anciens, qui les inspiraient et dont ils suivaient les méthodes. Le besoin d'établir une science systématique, la nécessité d'unification leur échappaient. Ils se perdaient en des cas particuliers. À la recherche de pureté en géométrie, ils ignorèrent l'éclosion de l'algèbre littérale.

Ils s'adonnaient, comme de nombreux mathématiciens au début du XVIIe siècle, à l'étude des sections coniques, suivant les brisées d'Apollonius, dont l'œuvre avait été éditée et étudiée par le Commandin. L'activité scientifique des Jésuites est intense et s'étend grâce aux missions, jusqu'à la cour de Pékin, où Euclide d'après Clavius est traduit en chinois (1607).

Mais, la géométrie et l'algèbre enseignées d'après Clavius laissent Descartes insatisfait. En 1616, il passe le baccalauréat devant la faculté de Poitiers et, sans goût, une licence de droit. Puis s'en va guerroyer sous les ordres de Maurice de Nassau, prince d'Orange, et de Maximilien Ier, duc de Bavière. À Bréda, vers 1618, il se lie d'amitié avec le physicien Beeckman. En 1619, l'armée de Maximilien prend ses quartiers d'hiver devant Neubourg, sur le Danube. Trois rêves y ouvrent à Descartes les principes de sa philosophie.

À Ulm, en 1620, il veut rencontrer Faulhaber, algébriste et professeur fameux.

Descartes s'adonne assidûment aux mathématiques et ses premières découvertes portent sur les polyèdres. « On le voit établir par un calcul littéral le théorème suivant : dans un tétraèdre dont un trièdre est trirectangle, le carré de l'aire de la face opposée est la somme des carrés de celles des faces adjacentes. Puis il propose calmement une généralisation à un espace quadridimensionnel » (J. Itard).

Abandonnant la carrière militaire, il voyage à travers toute l'Europe. On le retrouve à Paris dans les années 1625-1628, progressant en mathématiques au contact des savants qui se réunissent autour du père Mersenne, avec qui il correspondra ensuite jusqu'à la mort de celui-ci, en 1648.

Descartes part s'établir en Hollande afin de mener à bien son œuvre. Il se consacre aux mathématiques, à la philosophie, à la physique et à la physiologie. Impressionné par la condamnation de Galilée, il renonce à publier son *Traité du monde et de la lumière*, qui reprend le principe galiléen. Dans une lettre datée d'avril 1634, il refuse d'envoyer ce manuscrit à Mersenne et de « le faire voir jamais à personne », il ne souhaite que « continuer la vie qu'(il a) commencée en prenant pour devise : *bene vixit, bene qui latuit*. Le style de Descartes en est à jamais voilé.

Il n'est rien de dire que l'Église surveille tout exercice de l'esprit, pouvons-nous le concevoir ? Viète fut traduit comme sorcier devant la cour de Rome pour avoir – une commande royale – trouvé le chiffre, et toutes ses variations, employé dans leur correspondance par les Espagnols pendant les guerres civiles.

En Hollande, soucieux de tranquillité, Descartes eut cependant des amis : Claude Mydorge, auteur d'un traité sur les coniques ; Hortensius, professeur de mathématiques à Amsterdam ; Constantin Huygens, père de Christian ; Van Schooten, qui occupe la chaire de mathématiques à l'université de Leyde ; Golius, qui y est professeur de langues orientales. C'est ce dernier qui, en 1631, retour d'Orient, porte à la connaissance de Descartes une question de Pappus. Descartes la mentionne dans. la lettre que nous venons de citer, écrite à Amsterdam en avril 1634 et adressée au père Mersenne.

Cette question va étayer ses recherches dans le sens de l'unité des mathématiques et présidera à la composition de la *Géométrie*, court traité, dernier des trois *Essais de la Méthode* précédés du *Discours*, paru en 1637, à Leyde, sans nom d'auteur.

La *Géométrie* eut un retentissement immédiat. La géométrie et l'algèbre se correspondent, dans toute l'étendue des mathématiques telle qu'il la définit. La structure algébrique permet de classer les courbes et de résoudre méthodiquement les problèmes. Descartes y fixe aussi notre notation littérale. Il invente la géométrie des coordonnées, indépendamment de Fermat (publié en 1679), et fait émerger l'idée de fonctionnalité, que déploiera Leibniz ; Archimède trouve en lui ainsi qu'en Roberval et Fermat ses trois premiers successeurs, dans le domaine du calcul différentiel, avec la détermination de normales ou de tangentes aux courbes.

La renommée de Descartes philosophe et mathématicien s'étend et devient européenne. Il effectue plusieurs séjours en France : en 1644, 1647, 1648.

En 1649, la reine Christine de Suède, dont l'intérêt pour la philosophie de Descartes s'est éveillé, l'invite à se rendre auprès d'elle. Les grammairiens de la cour, jaloux de son influence, l'accueillent sans aménité. La reine fixe à cinq heures du matin l'heure quotidienne de ses leçons avec le Français. Or il a très jeune pris l'habitude de se lever tard, les Jésuites à la Flèche ayant été indulgents avec leur meilleur élève. Sa frêle constitution n'endure pas non plus la rigueur du climat. Un matin en allant à la cour, il contracte une pneumonie. Au bout de quelques jours il en meurt, « dans une tranquillité digne de l'innocence de sa vie » (Baillet). C'était le 11 février 1650.

5. exemple de passage du *Discours de la méthode* qui raconte la *Géométrie* et s'éclaire mal sans elle

et où l'on trouve les mêmes mots
« raison », « proportions », « rapports », « lignes »

L'œuvre mathématique de René Descartes est demeurée bien moins célèbre, dans la culture générale française, que sa pensée philosophique, laquelle y est étroitement associée. L'idée d'une analogie entre l'ordre des raisons mathématiques et l'ordre des effets de la nature régit la pensée de Descartes.

(« Ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné occasion de m'imaginer que toutes les choses qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes s'entresuivent en même façon. »)

Le titre complet de son livre est :

Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie, qui sont des Essais de cette Méthode.

Il explique au père Mersenne :

« Je ne mets pas *Traité de la Méthode*, mais *Discours de la Méthode*, ce qui est le même que *Préface* ou *Avis touchant la Méthode*, pour montrer que je n'ai pas le dessein de l'enseigner, mais seulement d'en parler. Car comme on peut voir de ce que j'en dis, elle consiste plus en pratique qu'en théorie, et je nomme les traités suivants des *Essais de cette Méthode*, parce que je prétends que les choses qu'ils contiennent n'ont pu être trouvées sans elle, qu'on peut connaître par eux ce qu'elle vaut. »

Il précise le contenu des trois *Essais de la Méthode* (*Dioptrique*, *Météores* et *Géométrie*) :

« En ce projet, je découvre une partie de ma Méthode, je tâche à démontrer l'existence de Dieu et de l'âme séparée du corps , et j'y ajoute plusieurs autres choses que ne seront pas, je crois, désagréables au lecteur. En la *Dioptrique*, outre la matière des réfractions et l'invention des lunettes, j'y parle aussi fort particulièrement de l'œil, de la lumière et de tout ce qui appartient à la catoptrique et à l'optique. Aux *Météores*, je m'arrête principalement sur la nature du sel, les causes du vent et du tonnerre, les figures de la neige, les couleurs de l'arc-en-ciel, où je tâche aussi à démontrer généralement quelle est la nature de chaque couleur, et les couronnes, ou *halones*, et les soleils, *ou parhelia*, semblables à ceux qui parurent à Rome il y a six ou sept ans. Enfin, en la *Géométrie*, je tâce à donner une façon générale pour soudre tous les problèmes qui ne l'ont jamais encore été. »

Et si « les choses qu'ils (les Essais) contiennent ne peuvent être trouvées sans elle (la Méthode) », c'est que cette méthode en appelle sans cesse à cette référence qu'est le raisonnement mathématique, pour l'analyser, l'appliquer à la « recherche de la vérité ». Parcourons le passage du *Discours* ci-joint (*voir encadré,* coll. La Pléiade, p. 137).

- Le premier précepte est de nature philosophique (l'esprit est face au doute qu'il doit écarter) ; les suivants sont mathématiques, en effet :

- le deuxième précepte définit le raisonnement analytique, la décomposition de la pensée en pas élémentaires, ou d'un problème donné en « difficultés » élémentaires ;
- le troisième et le quatrième préceptes sont souvent lus comme donnant la marche à suivre devant un problème mathématique quelconque : ordonner ses difficultés par ordre croissant (des objets « les plus simples » aux « plus composés »), procéder à sa mise en équation exhaustive (« dénombrements entiers », « revues générales », afin de « ne rien omettre ») : mais avant tout Descartes semble décrire son travail de résolution du méta-problème qui est l'objet même du livre II de la *Géométrie* (*De la nature des lignes courbes*):embrasser le champ mathématique dans toute son étendue, avec un classement exhaustif des courbes, des plus simples aux plus composées.

Le **raisonnement mathématique** de Descartes semble naître d'un glissement de la notion de **raison géométrique** (dans le sens initial de euclidien de proportion, rapport).

(Et on a l'impression que ce glissement peut lui-même être envisagé comme une proportion. Le raisonnement cartésien serait alors à la raison géométrique comme « la pyramide est à son ombre », ou le bâton à la sienne.)

À l'instar d'Euclide qui s'attache à étudier les relations des objets mathématiques entre eux, c'est-à-dire à comparer les grandeurs – notion qu'il ne définit pas – et à les ordonner selon leurs rapports, Descartes cherche à relier et ordonner les pensées elles-mêmes (en « longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles »). L'influence du livre V des *Éléments* d'Euclide est d'ailleurs très vivace tout au long de la *Géométrie* ; bien plus : son livre I, avec l'introduction d'une unité de longueur à laquelle on peut rapporter toute autre longueur, avec l'arithmétisation de la géométrie, pourrait marquer à la fois l'apogée et l'achèvement de la prépondérance du livre V des *Éléments* sur les mathématiques.

Mais je reprends la fameuse préface. On n'y lit pas la liste de résultats précis de prédécesseurs mathématiciens, on n'y lit pas l'historique de certains problèmes, on n'y définit pas techniquement l'analyse, comme Viète l'a fait, mais on voit que le premier objet d'étude de Descartes, en mathématiques, c'est le raisonnement lui-même, la pensée-outil posée, considérée d'abord presque isolément de tout autre objet ou vocabulaire mathématique.

C'est un instrument primordial : « entre tous ceux qui ont ci-devant recherché la vérité dans les sciences, il n'y a eu que les seuls mathématiciens qui ont pu trouver quelques démonstrations, c'est-à-dire quelques raisons certaines et évidentes ».

Si nous observons ensuite le mot « proportions », sa répétition puis les pronoms qui le désignent, le siècle éloigné où nous le lisons, nous rendent d'abord perplexes. Le mot doit être brouillé aujourd'hui. Comme il paraît gros de sens… : proportions, rapports, raisonnement, opérations algébriques. Ce sont les mêmes « proportions » qu'on trouve dans toutes les « sciences particulières qu'on nomme mathématiques » et qui les unifient. Ces sciences particulières sont : la géométrie, l'arithmétique et aussi « la musique, l'optique, la mécanique et bien d'autres » (*Règle IV pour la direction de l'esprit*, coll. La Pléiade, écrites en latin par R. Descartes et traduites par G. Le Roy, p. 50). Les « proportions » ont une nature propre extérieure aux mathématique (une nature logique ?).

Dans le *Discours (cf. extrait, encadré ci-dessous)* les « proportions » appartiendraient à un niveau d'abstraction supérieur à celui de la géométrie, qui va simplement servir à les « représenter à l'imagination et aux sens ». Pour mieux illustrer ces proportions, Descartes va les supposer « en des lignes », et il les expliquera aussi par « quelques chiffres », que son souci de la notation souhaite « les plus courts possible » : c'est bien l'histoire de la *Géométrie* que Descartes raconte, où il commencera par doter les « lignes » des cinq opérations algébriques utilisées en arithmétique. Les proportions sont donc entièrement assimilées, structurées par les opérations algébriques et nous comprenons de plus près comment chez Descartes, la prépondérance du raisonnement mathématique, comme instrument de recherche de la vérité, paraît naître de la proportion euclidienne, et, en retour, engendre prépondérance de l'instrument algébrique en mathématiques.

extrait de la deuxième partie du *Discours de la méthode*

« Et, comme la multitude des lois fournit souvent des excuses aux vices, en sorte qu'un État est bien mieux réglé lorsque, n'en ayant fort peu, elles y sont fort étroitement observées ; ainsi, au lieu de ce grand nombre de préceptes dont la logique est composée, je crus que j'aurais assez des quatre suivants, pourvu que je prisse une ferme et constante résolution de ne manquer pas une seule fois à les observer.

Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle ; c'est-à-dire d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention ; et de ne comprendre rien de plus en mes jugements que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.

Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.

Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusques à la connaissance des plus composés ; et supposant même de l'ordre entre eux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres.

Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre.

Ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné occasion de m'imaginer que toutes les choses qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes s'entresuivent en même façon, et que, pourvu seulement qu'on s'abstienne d'en recevoir aucune pour vraie qui ne le soit, et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées auxquelles enfin on ne parvienne, ni de si cachées qu'on ne découvre. Et je ne fus pas beaucoup en peine de chercher par lesquelles il était besoin de commencer, car je savais déjà que c'était par les plus simples et les plus aisées à connaître ; et considérant qu'entre tous ceux qui ont ci-devant recherché la vérité dans les sciences, il n'y a eu que les seuls mathématiciens qui ont pu trouver quelques démonstrations, c'est-à-dire quelques raisons certaines et évidentes, je ne doutais point que ce ne fût pas les mêmes qu'ils ont examinées ; bien que je n'en espérasse aucune autre utilité, sinon qu'elles accoutumeraient mon esprit à se repaître de vérités et ne se contenter point de fausses raisons. Mais je n'eus pas dessein, pour cela, de tâcher d'apprendre toutes ces sciences particulières qu'on nomme communément mathématiques ; et, voyant qu'encore que leurs objets soient différents, elles ne laissent pas de s'accorder toutes, en ce qu'elles n'y considèrent autre chose que les divers rapports ou proportions qui s'y trouvent, je pensai qu'il valait mieux que j'examinasse seulement ces proportions en général, et sans les supposer que dans les sujets qui serviraient à m'en rendre la connaissance plus aisée ; même aussi sans les y astreindre aucunement, afin de les pouvoir d'autant mieux appliquer après à tous les autres auxquels elles conviendraient. Puis, ayant pris garde que, pour les connaître, j'aurais quelquefois besoin de les considérer chacune en particulier, et quelquefois seulement de les retenir, ou de les comprendre plusieurs ensemble, je pensai que, pour les considérer mieux en particulier, je les devais supposer en des lignes, à cause que je ne trouvais rien de plus simple ni que je pusse distinctement représenter à mon imagination et à mes sens ; mais que, pour les retenir ou les comprendre plusieurs ensemble, il fallait que je les expliquasse par quelques chiffres, les plus courts qu'il serait possible ; et que, par ce moyen, j'emprunterais tout le meilleur de l'analyse géométrique et de l'algèbre, et corrigerais tous les défauts de l'une par l'autre.

Comme en effet, j'ose dire que l'exacte observation de ce peu de préceptes que j'avais choisis me donna telle facilité à démêler toutes les questions auxquelles ces deux sciences s'étendent, (…) non seulement je vins à bout de plusieurs que j'avais jugées autrefois très difficiles, mais il me sembla aussi vers la fin, que je pouvais déterminer, en celles mêmes que j'ignorais, par quels moyens et jusques où, il était possible de les résoudre. (…)

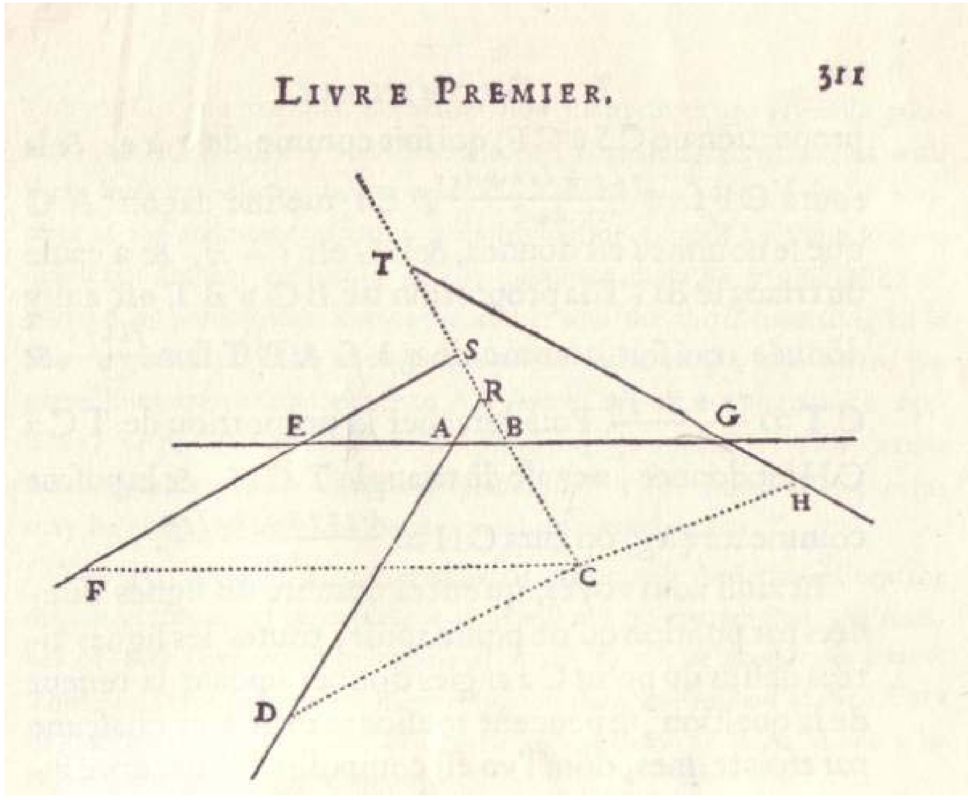
Mais ce qui me contentait le plus de cette méthode était que, par elle, j'étais assuré d'user en tout de ma raison. (…) Je me promettais de l'appliquer aussi utilement aux difficultés des autres sciences que j'avais fait à celles de l'algèbre (…) Mais, ayant pris garde que leurs principes devaient touts être empruntés de leur philosophie, en laquelle je n'en trouvais point encore de certains, je pensai qu'il fallait avant tout que je tâchasse d'y en établir ; et que, cela étant la chose du monde la plus importante, et où la précipitation et la prévention étaient le plus à craindre, je ne devais point entreprendre d'en venir à bout que je n'eusse atteint un âge bien plus mûr que celui de vingt-trois ans que j'avais alors. »

6. le livre I

La *Géométrie* est divisée en trois parties ou livres. Dans le livre I les mesures des segments de droits sont toujours connues par les rapports qui existent entre elles, mais la nouveauté – pour l'Europe –, c'est que l'on peut à loisir les rapporter à un segment unité.

Khayyam (v.1050, v. 1123) avait aussi introduit un segment unité ; il avait aussi remis en question la loi de l'homogénéité, en une démarche différente de celle de Descartes, inverse, moins radicale : il pouvait interpréter une longueur comme étant une aire (représentation traditionnelle, homogène, du produit de deux longueurs), une aire comme étant un volume (représentation homogène du produit de trois longueurs). De l'Orient à l'Occident, on ne sait en la matière ce qui fut transmis, ni ce qui ne le fut pas. Dans le livre I, la somme, la différence, le produit ou le quotient de deux segments quelconques peuvent être représentés par un autre segment. Descartes construit aussi géométriquement la solution des équations du deuxième degré, l'extraction de racines étant la cinquième des opérations à être géométrisée.

Ensuite vient l'énoncé d'un problème figurant au début du livre VII de la *Collection mathématique* de Pappus, problème dit *Ad tres et quatuor lineas* : il s'agit de trouver le lieu du point C tel que, si l'on joint ce point à quatre droites données au moyen de segments faisant avec elles des angles donnés, le produit des mesures de deux des segments obtenus égale – ou se trouve dans une proportion donnée avec – le produit des longueurs de deux autres segments.



On cherche C tel que CB.CF = k CD.CH

La généralisation à n (=2m ou 2m–1) droites est indiquée dans Pappus et sera reprise par Descartes. On considère d'une part un groupe de m droites et d'autre part un groupe de m–1 ou m droites, et l'on cherche le lieu du point C tel que, en joignant C à toutes ces droites par des segments faisant avec elles des angles donnés, le produit des longueurs des m premiers segments soit égal ou proportionnel au produit des mesures des m ou m–1 autres segments.

Descartes considère d'abord la question de Pappus proposée en 4 lignes. Apollonius savait que la solution était une conique mais la construisait à la règle et au compas. Descartes choisit A comme origine et pose AB = x. L'ordonnée de C est placée obliquement : BC = y. Les données sont représentées par d'autres lettres.

Descartes n'utilise donc pas ce qu'aujourd'hui nous appelons un repère cartésien mais un seul axe, celui des abscisses, et des droites auxiliaires parallèles entre elles.

Ensuite naît l'équation cartésienne, l'auteur affirmant que le lieu solution peut être décrit par une équation et « prenant successivement infinies grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi infinies pour la ligne x, et ainsi on aura une infinité de divers points, par le moyen desquels on décrira la courbe demandée. » (p. 313 de l'édition originale de 1637, dont *La Géométrie* occupe les pages 297 à 413, édition bilingue Dover : *The Geometry of René Descartes*).

Là pour la première fois dans un texte imprimé, une courbe est regardée en l'infinité de ses points et ceux-ci au moyen de coordonnées, dont la dépendance s'exprime par une équation.

Après avoir montré que CF, CD et CH sont des fonctions linéaires de x et y, Descartes suspend soudain l'étude de la question de Pappus, celles-ci requérant que soient exposées quelques généralités.

Ainsi se clôt le bref livre I.

D'un point de vue rhétorique, débuter le livre II là met en valeur ces généralités sur « la nature des lignes courbes ». Ces deux livres ne forment pas deux touts dissociables, le problème énoncé dans l'un étant surtout résolu dans l'autre.

7. le livre II

> « Je pourrais mettre ici plusieurs autres moyens pour concevoir des lignes courbes, mais (…) je ne sache rien de meilleur que de dire que tous les points, de celles qu'on peut nommer géométriques (…) ont nécessairement quelque rapport à tous les points d'une droite *(l'axe des abscisses)* qui peut être exprimé par quelque équation, et tous par une même » (p.319, éd. Dover)

La géométrie est la science des mathématiques exactes ; les courbes « géométriques » sont celles qui relèvent des mathématiques exactes ; les autres courbes sont appelées « méchaniques ».

D'après Pappus, les Anciens étudiaient trois sortes de problèmes — plans, solides ou *linéaires* —, selon que l'on pouvait les résoudre respectivement au moyen de droites et de cercles ; ou de sections coniques, avec des considérations tri-dimensionnelles ; les problèmes linéaires, eux, faisaient intervenir des courbes plus complexes que les coniques (« lignes plus composées ») : ces courbes plus compliquées, à tort ils les appelaient toutes mécaniques, les excluant de la géométrie, comme ne tombant pas sous une mesure exacte.

J'examine à présent comment Descartes procède pour reculer telles frontières des mathématiques exactes. Dans le champ des mathématiques Descartes admettra des courbes qui auparavant en étaient exclues (i.e. il nommera désormais « géométriques » certaines courbes autrefois considérées comme « méchaniques »).

Toutes ses courbes « géométriques » s'avéreront celles que nous appelons aujourd'hui algébriques ; les courbes demeurant « méchaniques » sont nos transcendantales.

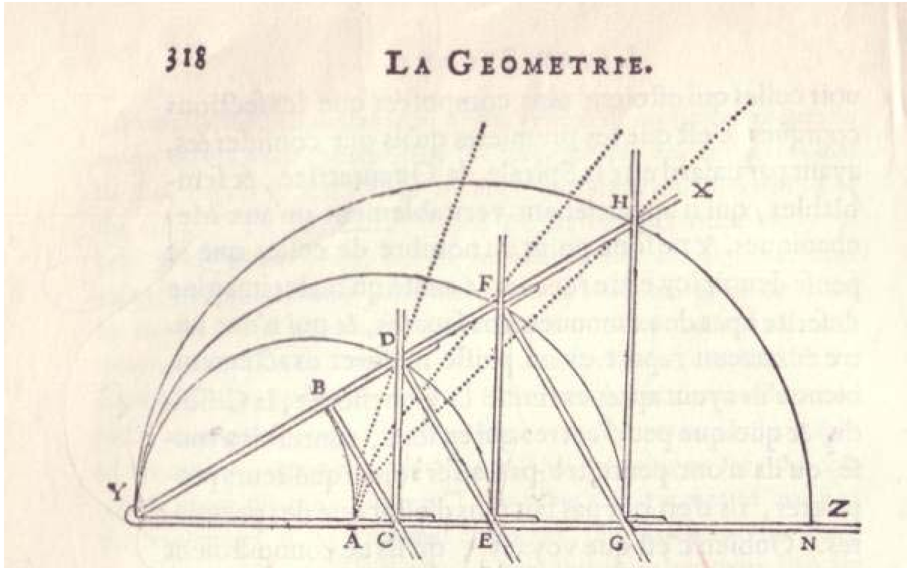
Parmi les postulats qui fondent la géométrie des Anciens, Descartes rappelle le premier et le troisième du livre I des *Éléments* d'Euclide, utiles aux problèmes plans (« qu'ils pussent joindre deux points donnés par une ligne droite, et décrire un cercle d'un centre donné qui passait par un point donné », p. 316). En outre, note-t-il, ils (Apollonius) en utilisent implicitement un autre, utile aux problèmes solides : « qu'on pût couper tout cône donné par un plan donné » - alors pourquoi ne pas poser encore celui-ci, qui « ne paraît en rien plus difficile » (mais introduit pourtant le mouvement en géométrie) : « que deux ou plusieurs lignes puissent être mues l'une par l'autre et que leurs intersections en marquent d'autres » ? C'est ce que fait Descartes, déterminant ainsi le champ de sa géométrie : est désormais « géométrique » toute courbe qu'on peut imaginer être engendrée par un nombre fini de mouvements continus successifs tels que chacun est exactement déterminé par le précédent.

Par exemple, la conchoïde est géométrique, contrairement à ce que pensaient les Anciens.

De même la cissoïde ($y^2 (2a - x)= x^2$). Les Anciens, à cause d'une connaissance imparfaite des unes et des autres, avaient confusément apparenté toutes ensemble cissoïde, conchoïde, spirale et quadratrice, alors que seules les deux dernières doivent êtres exclues de la Géométrie « parce qu'on les imagine décrites par deux mouvements *séparés*, et qui n'ont entre eux aucun *rapport* qu'on puisse mesurer exactement ». Descartes philosophe dirait qu'on n'y trouve pas les *proportions* qui font le raisonnement lui-même, et qui sont donc requises pour que de telles courbes soient acceptées en géométrie.

Le rejet des courbes transcendantales a d'ores et déjà pour clé la cohérence extrême de l'édifice philosophico-mathématique de Descartes. Les accepter aurait signifié pour lui sombrer dans la folie.

Toute courbe « géométrique » peut être engendrée dynamiquement, et le simple compas et la règle n'y suffisent plus. Pour illustrer son principe, Descartes, ingénieur de l'imaginaire, se figure un instrument qui matérialiserait l'outil algébrique et ses cinq opérations, instrument que jamais il ne construisit en réalité et dont la finalité est d'engendrer des courbes « géométriques », de plus en plus composées, par degrés, à l'infini. Voici :



L'angle XYZ étant initialement fermé, les neuf points nommés sont confondus avec le point A.

À mesure qu'on fait pivoter la règle XY autour de la charnière X, les équerres s'écartent, « s'entresuivent », la figure se déploie, les points B,D, F,H… décrivent de s courbes plus composées les unes que les autres,leur génération s'éloignant de plus en plus de la construction à la règle et au compas.

B décrit un cercle, et l'on trouve que l'équation de AD est $x^4=a^2(x^2+y^2)$, où a=YA.

L'équation de AF est : $x^8 = a^2 (x^2+y^2)^3$

Celle de AH est : $x^{12} = a^2 (x^2+y^2)^5$

Pour parfaire la définition des courbes « géométriques », l'auteur ajoute alors que ce sont celles qu'une équation peut représenter :

> « Je pourrais mettre ici plusieurs autres moyens pour concevoir des lignes courbes, mais (…) je ne sache rien de meilleur que de dire que tous les points, de celles qu'on peut nommer géométriques (…) ont nécessairement quelque rapport à tous les points d'une droite *(l'axe des abscisses)* qui peut être exprimé par quelque équation, et tous par une même »
> (*Géométrie*, livre II : *De la nature des lignes courbes,* p. 319)

Il n'a pas failli à son exigence de cohérence puisqu'il entend selon toute vraisemblance, par équation, équation algébrique, P(x,y) =0, où P est un polynôme. Il n'en connaît pas d'autre.

La distinction entre courbes algébriques et transcendantales est donc un apport important de Descartes, en même temps que sa principale faille, puisqu'à tant distinguer, opposer ces deux catégories de courbes, il finit dans une même phrase, en un même mouvement, à fonder ce qui sera plus tard appelé géométrie analytique et à en exclure les transcendantales. Entre la bonne démarche (distinction) et la mauvaise (exclusion), il y a une grande proximité, elles sont plus que juxtaposées. Avec la méthode (c'est-à-dire le type de raisonnement) qu'il s'est assignée, cette grande chose fertile et cette petite chose fausse sont indissociables. Lorsque l'histoire des sciences avance, c'est en ce type d'instant, où le grand fertile et le petit faux émergent pour la première fois, d'une façon que le moment ne permet pas encore de séparer.

Je reviens alors interroger la *Règle IV pour la direction de l'esprit*, qui « contient le principal secret de la méthode » : « il n'y en a pas de plus utile dans tout ce traité ; elle enseigne que les choses peuvent être rangées en différentes séries, non sans doute en tant qu'elles sont rapportées à quelque genre d'être, ainsi que les philosophes les ont divisées suivant des catégories, mais en tant que la connaissance des unes peut découler de la connaissance des autres, en sorte que, chaque fois que quelque difficulté se présente, nous puissions voir aussitôt s'il ne sera pas utile d'examiner certaines choses auparavant, et lesquelles, et dans quel ordre. » (trad. du latin par G. Le Roy, coll. La Pléiade).Critiquer les catégories d'Aristote, c'est encore se référer à Aristote, c'est encore l'aveu de ne pouvoir s'en détacher tout à fait.

Descartes n'admet donc dans le champ de sa *Géométrie* que les courbes qu'une équation algébrique peut représenter à notre esprit. Quand le doute fulgurera, il sera immense : on voit, beaucoup plus loin dans le livre II, s'opérer un renversement logique sidérant, qui fait vaciller tout le système ; est remise en cause, l'espace d'un instant, la validité des équations comme simple technique utile à la Géométrie : (p. 340) : « Et pour ce que cette façon de tracer une ligne courbe, en trouvant indifféremment plusieurs de ses points (i.e. grâce à son équation) ne s'étend qu'à celles qui peuvent aussi être décrites par un mouvement régulier et continu, on ne la doit pas entièrement rejeter de la Géométrie ». Mais alors le champ de la Géométrie, qui était celui de toutes les courbes admettant une équation, est à présent défini comment ? Quelles courbes y trouve-t-on ? pas seulement celles qui « peuvent être décrites par un mouvement régulier et continu », c'est-à-dire les courbes algébriques ?

Le vertige ne dure pas, ne se répercute hélas pas en développements mathématiques ; Du moins Descartes pressent-il là la relative étroitesse de son territoire mathématique. Ailleurs qu'en ce traité, il a étudié et étudiera des courbes transcendantales, mais il leur refusera toujours le passeport de l'équation cartésienne, c'est-à-dire, pour nous, la possibilité d'être le graphe d'une fonction.

Il était d'autant plus probable que le doute fût purement verbal, et fugace, qu'il se situe au livre II à un endroit crucial qui y est peu propice : juste après la résolution du problème de Pappus qui, généralisé à n droites, est censé, dans l'esprit de Descartes, atteindre par ses solutions toutes les courbes algébriques – d'un degré de plus en plus élevé à mesure qu'on donne un nombre n de droites plus grand – et donc les classer ; autant dire que ce problème constitue un autre chef d'exclusion des courbes transcendantales de la *Géométrie*. Peut-être même ce problème de Pappus a-t-il p été choisi que parce qu'il élevait définitivement le rempart contre le doute.

Une courbe transcendantale ne peut être solution d'aucun des cas de la question de Pappus. Une courbe algébrique, elle, en sa continuité, l'infinité de ses points, peut être construite à l'aide d'un instrument (tel compas perfectionné, telle équation, tel cas de la question de Pappus).Dans le cas d'une courbe transcendantale, cet instrument peut servir au mieux, non pas à l'atteindre en sa continuité, mais à déterminer quelques points spéciaux, en nombre fini, « pas un de ceux qui lui sont tellement propres. »

8. ce qu'apporte Fermat au même moment

On sait que Fermat avait dégagé la notion de « propriété spécifique » d'une courbe et inventé lui aussi la géométrie des coordonnées : *Ad locos Planos et Solidos Isagoge*, publié à titre posthume, en 1679, aurait été conçu pour l'essentiel vers 1629. On fait débuter la genèse de la Géométrie vers 1619, en accord avec les indications autobiographiques (voir ci-dessus la fin de l'extrait du *Discours de la méthode*). Dans *Ad locos…*, Fermat dresse une liste systématique d'équations : une importante contribution technique que Descartes n'apporte pas si clairement.

> Fermat nomme A et E (nos x et y cartésiens) les coordonnées du point I qui décrit la courbe. Z est le pied de la droite passant par I et perpendiculaire à un axe fixe, lequel est muni d'une origine N.
>
> - équation d'une droite passant par l'origine : « D in aequetur B in E. Punctum I erit lineam rectam positione datam » (soit $x/y = b/d$)
> - équation d'une droite quelconque : « Ut B ad D, ita R-A ad E… punctum I erit ad rectam positione datam » (soit $b/d = (a-x)/y$)
> - équation d'un cercle : « B^2 A – A^2 aequetur E^2. Punctum I est ad circulum positione datum, quando angulus NZI est rectus » (soit $a^2 - x^2 = y^2$)
> - équation d'une ellipse : « B^2 – A^2 ad E^2, habeat rationem datam. Punctum I erit ad Ellipsim » (soit $a^2 - x^2 = ky^2$)
> - équation d'une hyperbole : « Si $A^2 + B^2$ est ad E^2 in data ratione punctume I est ad hyperbolem » (soit $a^2 + x^2 = ky^2$)
>
> Fermat savait aussi qu'une équation du type $xy = a$ représente une hyperbole et qu'une équation de type $x^2 = ay$ représente une parabole.

Fermat et Descartes rivalisaient. Le long mûrissement, l'indépendance de travaux pourtant concomitants suscita d'âpres querelles d'antériorité, les deux esprits différant autant que certaines de leurs découvertes se ressemblaient.

L'influence de Descartes grandit bien avant la publication des travaux de Fermat. Descartes est plus théorique, et dégage seul l'idée générale de relation entre les variables x et y (voir ci-dessus, le paragraphe consacré au livre I de la *Géométrie*), c'est-à-dire l'idée de fonctionnalité qui très vite après lui ne sera plus cantonnée aux expressions algébriques et fera florès en calcul infinitésimal, avec d'abord le développement des fonctions en séries infinies (Nicolas Mercator en 1668, puis Newton).

9. la recherche et le secret

Le contexte de la recherche, dans la première moitié du XVII^e^ pouvait attiser les querelles. Considérée comme l'aube de la science moderne, dernier moment où la science n'est pas encore immensément étendue et où un seul homme peut imaginer l'envisager toute, où l'éclectisme est fécond, c'est une période où la vie scientifique s'organise, l'ultime période avant l'institutionnalisation. La Royal Society sera fondée en 1663 ; Colbert fondera l'Académie des Sciences en 1666 ; Mersenne (mort en 1648) en aura été le père spirituel. Du temps de Descartes, la science n'a pas encore inventé ses métiers. Ceux qui se consacrent aux mathématiques sont solitaires et savent bien aussi qu'ils sont plusieurs, car ils correspondent. Ils ne sont pas tenaillés par le besoin ni l'envie de publier. Fermat vivant ne publie rien. Descartes écrit sous le masque. Héritée des alchimistes médiévaux, le secret demeure une composante irrationnelle de l'activité intellectuelle.

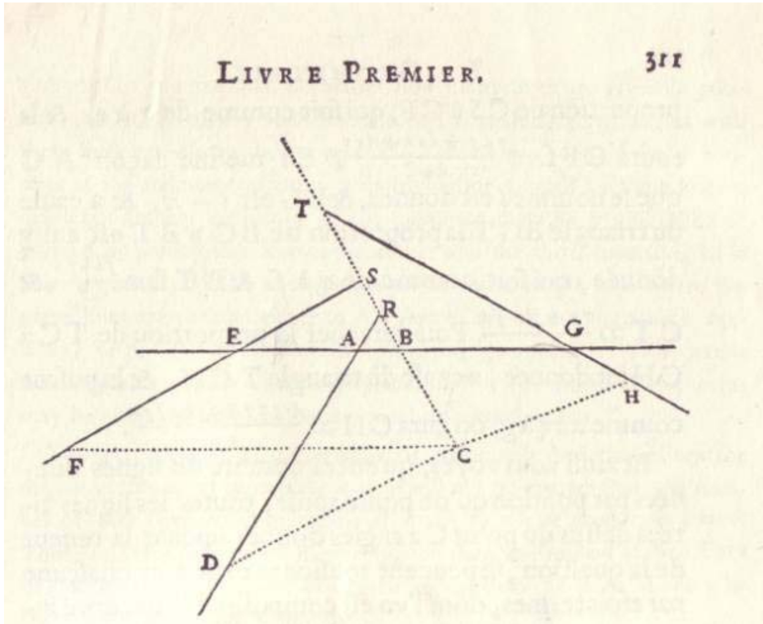
Cette notion subsiste aujourd'hui, puisque nous parlons de « chercheurs » et non pas d'inventeurs, ce qui conviendrait mieux aux mathématiciens puisque ce qu'ils trouvent n'est pas le code secret des cellules ni de l'or, mais des choses qui ne sont pas réelles, puisqu'en mathématiques ce qui n'est pas écrit n'est rien. La notion de secret pouvait temps de Descartes prendre cette forme : « les anciens géomètres se sont servis d'une analyse, qu'ils étendaient à la résolution de tous les problèmes, mais dont ils ont jalousement privé la postérité (…) des traces de cette vraie mathématique se voient encore chez Pappus et Diophante, qui, sans appartenir au premier âge, ont cependant vécu bien des siècles avant nous. Mais je croirais volontiers que par une malice mauvaise, ces auteurs l'ont ensuite cachée eux-mêmes » (*Règle IV pour la direction de l'esprit*).

L'énigme diophantienne vaut bien une croyance mais ici elle s'étend à tous les mathématiciens de l'Antiquité. Le travail de ceux du XVII^e^ siècle consiste à découvrir l'antique méthode, à lire ce qui se peut des Grecs, des Alexandrins, à les comprendre, les maîtriser, les suivre ou procéder à leur étude critique, autant dire à labourer un champ en y cherchant un trésor, comme dans la fable du Laboureur et ses enfants. Descartes a trouvé ce trésor « car la méthode, qu'on appelle du nom étranger d'algèbre, n'est pas autre chose, semble-t-il, pourvu toutefois qu'on parvienne à la débarrasser des chiffres nombreux et des figures embrouillées qui la surchargent ». C'est ainsi qu'il vient d'inventer la géométrie algébrique.

10. reprise de la lecture de la Géométrie : suite du livre II

Descartes regroupe les courbes algébriques en « genres », le nième genre contenant les courbes de degré 2n et de degré 2n – 1. Ce classement provient de ce que le problème de Pappus proposé en 4n lignes atteint en ses solutions des courbes (et non pas toutes les courbes comme le pensait Descartes) du nième genre. (*L.II, p. 324, 3ème chapitre*), qui finit par : « en somme il n'y a pas une ligne courbe qui tombe sous le calcul **et** qui puisse être reçue en Géométrie (*dans l'esprit de Descartes, ce devrait être un pléonasme : on relève dans ce zèle verbal peut-être une hésitation dans la délimitation de la Géométrie*) qui n'y soit *(à la question de* Pappus) utile pour quelque nombre de lignes ». De ce point de vue, toutes les parties hiérarchisées de l'algèbre et de la géométrie se correspondent.

Ces « genres », obsolètes, permettent à leur auteur de poser les jalons d'une nouvelle notion, celle d'invariance (cf. p. 320). Le « genre » d'une courbe est indépendant de l'axe et de l'origine que l'on choisit arbitrairement pour décrire l'équation de cette courbe. Certains choix sont techniquement plus judicieux que d'autres, ils rendront « l'équation plus courte et plus aisée ». Indiquons brièvement, à propos de technique, ce que Descartes met en place pour discuter et résoudre le problème de Pappus en quatre lignes :



Données :

BR/AB = b/z ; CD/CR= c/z ; BS/BE = d/Z ; CF/CS = e/z ;

BT/BG = f/z ; CH/CT = g/z : AE = k ; AG = l

D'où

CD = $(cyz+bcx)/z^2$

CF = $(ezy+dek.+dex)/z^2$

CH = $(gzy + fgl - fgx)/z^2$

La condition CB xCF = CD x CH donne

$y^2 (ez^3 - cgz^2) = y (cfglz - dekz^2 - dez^2x - cfgzx + bcgzx) + bcgflx - bcfgx^2$

Cela n'est vrai que lorsque la position relative des points est la même que sur la figure. En effet, aux yeux de Descartes, les lettres ne peuvent que représenter des nombres positifs, jamais des nombres négatifs. C'était l'usage courant (jusqu'à la publication de *De Reductione Aequationum*, de J. Hudde en 1658). Selon les positions relatives des points, il faut changer les signes + et -. La discussion en est alourdie. Malgré le souci de détail qu'on observe ici, Descartes ne s'est vraisemblablement pas rendu compte que, sous cette astreinte, l'équation d'une courbe n'est valable que dans un quadrant donné.

La précédente égalité est simplifiée grâce à des données auxiliaires m, n et o :

$y^2 = 2 my - 2nx/z + (bcgflx - bcgfx^2)/ (ez^3 - cgz^2)$

Descartes ignore la racine négative de cette équation en y, d'où

$y = m - nx/z + (m^2 + ox + px^2/m)^{1/2}$ (où y = BC)

ou $y = m - nx/z + (m^2 + ox - px^2/m)^{1/2}$ (où y = BC).

Descartes utilise alors l'auxiliaire LC (que nous notons y') égale à y-m+nx/z . Par suite ::

$y' = (m^2+ox+px^2/m)^{1/2}$ ou $y' = (m^2+ox-px^2/m)^{1/2}$

Il montre alors en utilisant les théorème du livre I des Coniques d'Apollonius que la courbe est une section conique ou une droite, soit une courbe du « premier genre ».

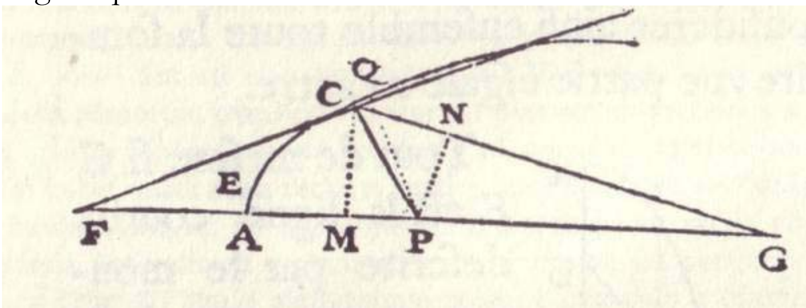
Dans tout problème « géométrique » (où « il est question de trouver quelque point auquel il manque une condition pour être entièrement déterminé ») « tous les points d'une même ligne peuvent être pris pour celui qui est demandé. » A l'aide de l'équation de la « ligne », en fixant une coordonnée, on est donc amené à résoudre le problème « géométrique » par la résolution d'une équation algébrique à une inconnue.

L'étude d'un cas particulier de la question de Pappus en cinq lignes (quatre parallèles et une perpendiculaire) permet à Descartes d'exposer une résolution analytique dont la présentation est plus agréable que dans le cas général à quatre lignes. Ici la courbe solution est une « parabole du second genre » (engendrée par le mouvement d'une parabole et d'un cercle), dont Descartes donne l'équation :

$y^3 - 2\,ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy$

Après avoir traité la question de Pappus, Descartes reprécise un propos qui dans son esprit y est intimement lié, à savoir le champ de sa Géométrie. Ainsi en sont-elles rejetées les lignes « qui sont tantôt droites tantôt courbes, à cause que la proportion, qui est entre les droites et les courbes, n'est pas connue, et même je crois ne le peut être par les hommes. » Descartes reprend ici à son compte le dogme aristotélicien pour refuser aux courbes la possibilité d'une rectification algébrique. Comme évidence du contraire, il rectifiera plus tard algébriquement une courbe transcendantale, la spirale logarithmique. W. Neil sur l'indication de Wallis, en 1657, et aussi Huygens, démentiront ce jugement erroné en rectifiant algébriquement la parabole semi-cubique.

Le livre deux se poursuit par l'exposé de la détermination des normales à une courbe, selon une méthode tout algébrique.



Il s'agit de trouver la normale CP à la courbe CE. Les ordonnées sont déterminées perpendiculairement aux abscisses

C a pour abscisse CM = x et pour ordonnée AM = y

R. Descartes pose aussi PC = s et PA = v.

Puisque $CM^2 + MP^2 = PC^2$, on a $x^2 = s^2 - (v- y)^2$ (1)

Descartes utilise ensuite la relation fonctionnelle entre x et y. Dans l'exemple où CE est une ellipse, il transcrit algébriquement le théorème 13 du livre I des Coniques d'Apollonius :

$x^2 = ry - (r/q) y^2$ (2)

De (1) et (2), il résulte G(s,v,y)= 0, soit

Explicitement ici : $y^2 + ((qr-2qv)/(q-r))y+(qv^2 /– qs^2)/ (q-r)= 0$

Il affirme que G(s,v,y) peut être factorisée par $(y-e)^2$ car « si ce point P est tel qu'on le désire, le cercle dont il sera le centre, et qui passera par le point C, y touchera la ligne courbe CE, sans la couper » (p. 345). G admet non pas deux racines distinctes en y mais une racine double.

Égalant alors les deux polynômes G(s,v,y) et $(y-e)^2$, il identifie leurs coefficients :

$-2 e = (qr- 2qv)/ q-r$ et $e^2 = (qv^2 - qs^2)/ (q-r)$.

À propos de la technique qui identifie terme à terme les coefficients de deux polynômes égaux, la fierté de René Descartes éclate sur un ton particulièrement savoureux : « Mais je veux bien en passant vous avertir que l'invention de supposer deux équations de même forme, pour comparer séparément tous les termes de l'une à ceux de l'autre, et ainsi en faire naître plusieurs d'une seule, dont vous avez vu ici un exemple, peut servir à une infinité d'autres problèmes, et n'est pas l'une des moindres de la méthode dont je me sers. » Newton l'utilisera à grand profit.

La première des deux égalités obtenues amène

$V = e - (r/q)e + r/2$

Le point C étant choisi, e est son ordonnée, et l'on peut marquer P sur l'axe A, puisque AP = v, et tracer la normale CP.

Notons que Fermat, lui, détermine les tangentes (cf. *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, Toulouse, 1679 ; cf. aussi la note 160 de l'édition Dover de Descartes, p. 112 ; ou encore Scott, pp. 119-120, en bibliographie ci-jointe).

Descartes applique la même méthode à la « parabole du second genre » et aux ovales utiles à sa Dioptrique, ovales dits aujourd'hui de Descartes, qu'il étudie en détail grâce à leurs équations paramétriques.

C'est en suggérant une extension tridimensionnelle de sa *Géométrie*, au moyen de projections sur deux plans perpendiculaires l'une à l'autre, que s'achève le livre II.

11. Le livre III

De caractère très algébrique, le livre III contient une contribution à la théorie des équations. Outre l'étude des équations des troisième et quatrième degrés, on y trouve une méthode pour résoudre celle des cinquième et sixième degrés au moyen de l'intersection d'un cercle et d'une parabole. Cette fois, ce sont donc des problèmes algébriques qui se trouvent résolus à l'aide de constructions géométriques.

Mentionnons encore que Descartes y énonce la règle des signes qui porte son nom, et inaugure l'expression racines « imaginaires ».

Le mot imagination tombe volontiers sous la plume de Descartes. La géométrie sert à représenter les proportions « à l'imagination et aux sens ». Descartes conjugue dix fois le verbe imaginer dans le livre II. Les clichés qui opposent raison cartésienne et imagination sont le fait de personnes qui ne lisent pas et dont les paroles sont bourbeuses d'ignorance. On ne conçoit pas qu' un mathématicien, quelle que soit sa valeur, se passerait d'imaginer, puisqu'il travaille dans un univers exclusivement pensé. Et Descartes devait imaginer bien plus que les autres ; il conjugue dix fois le verbe imaginer dans le livre II, ce n'est même pas si courant. Les dix occurrences apparaissent dans les généralités sur les lignes courbes, dans le traitement de la question de Pappus et des normales ; il n'emploie plus ce verbe dès qu'il traite des ovales utiles à l'optique, c'est-à-dire utiles à la vision du monde concret qui nous entoure.

La Géométrie s'achève avec ces mots : « Et j'espère que nos neveux me sauront gré, non seulement des choses que j'ai ici expliquées, mais aussi de celles que j'ai omises volontairement, afin de leur laisser le plaisir de les inventer ». Phrase assez commentée, on a invoqué la morgue du gentilhomme, le laconisme de l'officier. Certes la condamnation de Galilée déforma le style de Descartes, accrut sa méfiance. Quoiqu'il en soit, les résultats que Descartes a donnés sans les démontrer le sont aujourd'hui. Sa lecture ne pose plus aux mathématiciens de problèmes profonds de compréhension, comme ce put être le cas autrefois. Si la phrase cartésienne reprend l'idée du trésor caché, perdu, on n'y voit aujourd'hui, qu'une exhortation au travail, un sourire spirituel.

Dominique Sels

12. bibliographie

René Descartes

- *The Geometry of René Descartes with a fasimile of the first edition*, éd. bilingue annotée, Dover, traduction et notes par D.E. Smith et M.L Latham, 1954 ;1925 pour la traduction. (prix USA 1988 : $ 4.50).

D

- *La Géométrie*, éd. AREFFPI (Bibliothèque universitaire, 3e cycle de mathématiques, Paris VII).

-

- Œuvres et lettres, présentées par André Bridoux, coll. La Pléiade, éd. Gallimard. (Contient notamment *Les Règles pour la Direction de l'esprit*, le *Discours de la méthode*, des lettres ; ainsi que la relation de Baillet de *La Mort de Monsieur Descartes.)*

\- - - - - -

Commentaires

- Jean Itard, *La Géométrie de Descartes*, conférence du Palais de la Découverte prononcée en 1956, présentée et éditée par Roshdi Rashed in : Jean Itard*, Essais d'histoire des mathématiques*, Paris, Librairie A. Blanchard, 1984.

- A. Koyré*, Trois leçons sur Descartes,* in 8°, Le Caire, 1937 – B.U. Sorbonne SP n 3549.

- Claude Rabuel*, Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes,* Lyon, 1730 - B.U. Sorbonne Sxt 49, in 4°.

- J. Scott, *The Scientific work of René Descartes*, London, éd. Taylor & Francis, in 8°, 1953 – B.U. Sorbonne S 2619.

-- -- --
pour une vision large

- Amy Dahan et Jeanne Peiffer, *Une histoire des mathématiques*, éd. du Seuil, coll. Points-Sciences.
- Hofmann (Jos. E.), *Histoire des mathématiques*, in 12°, 1956 (B.U. Sorbonne, S446 et S364).
- Smith (D.E.) (traducteur de Descartes), *History of Math*, in 8°, Dover, B.U. Sorbonne, L 16408)

Dominique Sels, *La Géométrie* de Descartes, exposé pour le cours de
M. Roshdi Rashed, université de Paris VII, janvier 1988.

articles de Dominique Sels

À propos de l'auteur : notice sur wikipedia. Dominique_Sels cliquez ICI

du même auteur, 7 titres disponibles www.chambreloup.fr
aux éditions de la Chambre au Loup

CAMARILLO (Adios les seventies), *roman,* 2007. ISBN : 978-2-9528451-0-6
LES PLUS BEAUX DIAMANTS DU MONDE*, notes de nuit,* 2007.
ISBN : 978-2-9528451-1-3
LES MOTS DE L'AMOUR ARRIVENT D'ATHÈNES, vocabulaire de l'amour dans *Le Banquet* de Platon, suivi du Portrait de Socrate, *étude pour le plaisir*, 2008.
ISBN : 978-2-9528451-2-0 – EAN 9782952845120
RÊVERIE ET FÉCONDITÉ, *roman,* 2009, ISBN 978-2-9528451-3-7

chez d'autres éditeurs

ÉDEN EN FRICHE, *roman,* Denoël, 1990 - ISBN : 2.207.203652-8

CHÈRE INDOLENTE*, roman,* Denoël, 1991- ISBN : 2.207.23874-1

ÉCRIRE POUR CONQUÉRIR (l'Atelier de Dauphine), Le Banquet de Frazé, 2004 ISBN : 2-9521689-0-3

Open Library Dominique Sels